INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

Juin 1986. — Option MATHÉMATIQUES

TROISIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

On donne un réel m compris strictement entre 0 et 1 et on considère la fonction :

$$f_m \left\{ \begin{array}{l}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\cos x}{x^m} \end{array} \right.$$

On veut déterminer une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} f_m(x)\,dx = I_m$; partageant l'intervalle d'intégration en 4 parties, on pose :

$$A_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_m(x)\,dx$$

$$B_m = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f_m(x)\,dx \qquad C_m = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} f_m(x)\,dx \qquad D_m = \int_{\frac{5\pi}{2}}^{+\infty} f_m(x)\,dx.$$

I

1° Montrer que l'intégrale A_m est bien définie.

2° Soit P la partie polynôme du développement limité d'ordre 6 de cos x au voisinage de 0. Exprimer $A' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{-m} P(x)\,dx$ comme produit de $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-m}$ par un polynôme $Q(u)$ où $u = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$.

Pour $m = 0{,}7$, calculer la meilleure valeur décimale approchée à 10^{-6} près de A'.

3° Donner un encadrement de l'erreur commise en remplaçant $A_{0,7}$ par A'.

4° Calculer les valeurs approchées à 10^{-6} près des nombres $f_{0,7}(x_k)$ pour $x_k = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{8}$, k entier variant de 1 à 7; les sept valeurs devront figurer sur la copie dans des tableaux bien disposés.

Calculer : $S_1 = \sum_{p=1}^{3} f(x_{2p})$ et $S_2 = \sum_{p=0}^{3} f(x_{2p+1})$.

5° Exprimer, au moyen de S_1 et de S_2, les valeurs approchées de $B_{0,7}$ fournies par la méthode des trapèzes et par celle de Simpson (valeurs notées respectivement T et S).

Donner ensuite les valeurs approchées à 10^{-6} près de T et de S.

II

1° Soit trois réels a, b, h : $0 < a < b$. Intégrer $\int_a^b x^h . (\cos x\,dx)$ par parties.

Montrer que $\int_a^{+\infty} x^h \cos x\,dx$ existe pour tout h strictement négatif. Exprimer D_m en fonction de D_{m+2}.

2° Utiliser la relation qui vient d'être obtenue pour ramener le calcul de $D_{0,7}$ à celui de $D_{8,7}$ et effectuer ce calcul en prenant $D_{8,7} = 0$.

Déterminer un majorant simple de $|D_{8,7}|$. Quelle est l'incertitude sur $D_{0,7}$ provenant du remplacement de $D_{8,7}$ par 0 ? On donnera la réponse sous la forme $K.10^{-6}$, K entier.

3° Effectuer, dans $C_{0,7}$, le changement de variable $x = 2\pi + t$; remplacer $\frac{1}{(2\pi + t)^{0,7}}$ par la partie polynôme de son développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0. On obtient ainsi une valeur approchée de $C_{0,7}$ qu'on mettra sous la forme :

$$C' = 2.(2\pi)^{-0,7}\left[1 + \alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t\,dt + \beta\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^4 \cos t\,dt\right]$$

où α et β seront laissés sous leur forme exacte.

Calculer explicitement les deux intégrales figurant dans C' puis en donner une valeur approchée à 10^{-6} près. Donner enfin une valeur approchée de C' toujours à 10^{-6} près.

4° Déduire des diverses questions une valeur approchée I' de $I_{0,7}$.

5° Déterminer un majorant de $|I_{0,7} - I'|$.

Pour la méthode de Simpson (I, 5°) on admettra une incertitude de $20 . 10^{-6}$ (la valeur donnée par la méthode des trapèzes est donc fort médiocre).

Ecole Nationale de l'administration economique
Math 3
1986
page 97